На правах рукописи

УСОВА Анастасия Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ И ФУНКЦИЙ ЦЕНЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РОСТА

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2012

Работа выполнена в отделе динамических систем Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук Тарасьев Александр Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук Никонов Олег Игоревич
	кандидат физико–математических наук Кандоба Игорь Николаевич
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ВМиК, г. Москва

Защита диссертации состоится 22 февраля 2012 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико–математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 20 января 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико–математических наук Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Представленная диссертация посвящена разработке методов решения задач оптимального управления на бесконечном промежутке времени. Задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом приобретают все более значимый прикладной характер. Они позволяют исследовать модели экономического роста, составленные для анализа и прогнозирования экономического развития регионов и стран. Особое внимание в диссертации уделено исследованию свойств гамильтонианов и гамильтоновых систем в многомерных задачах оптимального управления. Основные результаты диссертации связаны с изучением качественного поведения гамильтоновых систем для случая, когда они обладают единственной стационарной точкой седлового типа. В этой ситуации удается построить нелинейный регулятор для гамильтоновой динамики, позволяющий стабилизировать гамильтонову систему вблизи положения равновесия. По поведению стабилизированных траекторий можно оценить характер оптимальных решений вблизи стационарного положения, что, в конечном счете, позволяет оптимизировать схемы построения оптимальных стратегий в задачах оптимального управления на бесконечном промежутке времени. В диссертационной работе приводится алгоритм построения оптимальных траекторий, который учитывает особенности стабилизированных решений и использует эти данные для построения оптимальных стратегий, строится оценка точности работы алгоритма по функционалу качества задачи управления. Указанный алгоритм реализован в компьютерных программах, которые были использованы при моделировании процессов экономического роста. Вычислительные эксперименты проведены на реальных эконометрических данных. Важное место в работе уделено исследованию асимптотического поведения оптимальных решений и функций цены при изменении параметров моделей экономического роста, на основе которых формулируются задачи управления с бесконечным горизонтом.

Актуальность темы. В настоящее время резко возросла востребованность таких разделов современной математики как теория управления и теория дифференциальных игр. Это объясняется тем, что спектр дисциплин, обращающихся к методам математического моделирования значительно расширился. Аппарат теории оптимального управления и дифференциальных игр активно используется для исследования математических моделей в таких областях как аэрокосмические науки, экономика, инженерные и технические науки, науки об окружающей среде, финансовая математика, гибридные системы, медицинские науки и науки о здравоохранении, вычислительные и компьютерные науки, океанографические, физические, общественные и математические науки. Интерес к теории оптимального управления и ее приложениям со стороны российских, немецких, французских, американских, японских математиков, экономистов и специалистов по проблемам окружающей среды, а также международных научных организаций существенно вырос, и это подтверждается значительным увеличением количества работ в российских и зарубежных издательствах.

Фундаментальным в теории оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина [1], который находит все более широкое применение в работах российских и зарубежных математиков, вследствие чего он активно развивается и обобщается на новые классы задач. В рамках теории дифференциальных игр рассматриваются задачи управления в условиях неопределенности. В этом направлении основополагающую роль играет принцип экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, развитию которого уделяется все большее внимание, в частности, для построения оптимальных стратегий в сеточных схемах и для обобщения понятия стабильности. Развитие строгой теории задач конфликтного управления следует отнести к работам Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [2].

В аспекте развития теории оптимального управления и теории дифференциальных игр существенными являются работы Р.В. Гамкрелидзе, А.В. Кряжимского, А.Б. Куржанского, Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Осипова, Б.Н. Пшеничного, Ф.Л. Черноусько, J.P. Aubin, T. Basar, R. Bellman, P. Bernhard, L. Berkovitz, A. Friedman, Ho You-Chi, R. Isaacs, R.E. Kalman,

---

[1] *Понтрягин Л.С.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.*, Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

V. Lakshmikantham, G. Leitman, P.L. Lions, P. Varaiya.

Значительный вклад в развитие методов теории оптимального управления и дифференциальных игр внесли Э.Г. Альбрехт, А.В. Арутюнов, С.М. Асеев, В.Д. Батухин, Ю.И. Бердышев, В.И. Благодатских, В.Г. Болтянский, С.А. Брыкалов, Ф.П. Васильев, Р.Ф. Габасов, Н.Л. Григоренко, М.И. Гусев, А.В. Дмитрук, В.И. Жуковский, С.Т. Завалищин, М.И. Зеликин, А.Д. Иоффе, Ф.М. Кириллова, А.В. Ким, А.Ф. Клейменов, А.Н. Красовский, Ю.С. Ледяев, Н.Ю. Лукаянов, В.И. Максимов, А.А. Меликян, А.А. Милютин, М.С. Никольский, О.И. Никонов, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Л.А. Петросян, В.Г. Пименов, А.Н. Сесекин, Н.Н. Субботина, А.М. Тарасьев, В.М. Тихомиров, Е.Л. Тонков, В.Е. Третьяков, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, Т.Ф. Филиппова, А.Г. Ченцов, А.А. Чикрий, А.Ф. Шориков, M. Bardi, E.N. Barron, I.C. Dolcetta, L. Cesari, M. Falcone, R. Jensen, M. Ishii, P.V. Kokotovic, G.J. Olsder, E. Roxin, P.E. Souganidis, F.E. Udwadia, J. Warga и многие другие ученые.

Огромный спектр приложений теории оптимального управления требует расширения основополагающих конструкций принципа максимума Л.С. Понтрягина, в частности, для задач управления на бесконечном промежутке времени. Такие постановки характерны для моделей экономического роста и задач финансовой математики. В связи с этим важно отметить работы С.М. Асеева и А.В. Кряжимского [3] по обобщениям принципа максимума для задач с бесконечным горизонтом, работы Г. Маурера по задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями и их приложениям к задачам оптимизации инвестиционных процессов. Циклические управляемые процессы с целевыми функционалами, определяемыми как предельные значения усредненных по времени интегралов качества, рассматривались в работах В.И. Арнольда и его учеников [4].

---

[3] *Асеев С.М., Кряжимский А.В.*, Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. 2007. Т. 257 С. 5–271.

[4] *Arnold. V.I., Davydov A.A., Vassiliev V.A., Zakalyukin V.M.*, Mathematical Models of Catastrophes. Control of Catastrophic Processes // IIASA Reprint RP-06-007, from Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), EOLSS Publishers, Oxford, UK. 2006. 46 P.

Большое внимание уделяется исследованию достаточных условий оптимальности для управляемых систем с вогнутыми гамильтонианами. Изучаются свойства, в частности, асимптотические свойства, решений гамильтоновых систем. Отметим здесь работы Т. Базара, Дж. Лейтмана, Т. Рокафеллара в приложении к исследованию динамических игр, в том числе, описывающих конкурентную рыночную среду.

Развивается теория уравнений Гамильтона-Якоби в аспекте анализа и решения задач управления с нерегулярностями, сингулярно возмущенных задач с малым параметром, исследование минимаксных решений, аппарат которых ввел А.И. Субботин.

Теория оптимального управления и теория позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения тесно связаны с теорией выживаемости, задачами построения и оценки множеств достижимости управляемых систем и дифференциальных включений. В связи с этим отметим исследования А.Б. Куржанского, М.С. Никольского, Ф.Л. Черноусько и их сотрудников.

Теория выживаемости была развита в работах зарубежных математиков Ж.-П. Обэна, Х. Франковской, Г. Хаддада и других авторов. Эти работы посвящены задачам выживаемости управляемых систем на бесконечном промежутке времени при наличии стационарных фазовых ограничений. Существенные результаты по разработке аппроксимационных схем, направленных на приближенное вычисление ядер выживаемости и множеств достижимости, получены немецким математиком Ф. Колониусом.

Моделирование экономических процессов, финансовое планирование являются одной из наиболее широких областей применения теорий оптимального управления и дифференциальных игр. Среди наиболее известных работ в этом направлении следует отметить труды лауреатов Нобелевской премии нескольких лет К. Эрроу [5], Л.В. Канторовича [6],

[5] *Arrow, K.J.*, Application of Control Theory to Economic Growth // Mathematics of the Decision Sciences. 1968. No 2. P. 85–119.

[6] *Kantorovich, L.V., Makarov, V.L.*, Growth Models and their Application to Long-term Planning and Forecasting // In: Long-term Planning and Forecasting, Proc. Conf. Macmillan Press, 1976.

Т. Шеллинга [7]. Методы, разработанные этими авторами, получили особое значение при построении моделей экономического роста. Одними из первых в этом направлении были работы Т. Купманса, Ф. Рамсея, Р. Солоу, К. Шелла. Последние монографии известных американских экономистов Р. Барро, Дж. Гроссмана, И. Хелпмана [8], П. Кругмана, Ч. Джонса, П. Нордхауса и Д. Ромера по эндогенной теории роста поддерживают важность теории оптимального управления для адекватного описания сбалансированных пропорций экономического развития. Кроме того, прикладными моделями теории дифференциальных игр и робастного управления занимаются такие известные американские специалисты по оптимальному управлению как Дж. Лейтман, Ф. Удвадиа в сотрудничестве с сильными экономистами из западно-европейских университетов Л. Ламбертини, К. Дейссенбергом, Дж. Дози. Разработке моделей технологического развития и их эконометрическому анализу посвящены работы группы экономистов из Токийского института технологий, возглавляемой Ч. Ватанабе [9]. Модели макроэкономического развития и эндогенного экономического роста получили развитие в трудах группы экономистов под руководством Р. Айреса [10] из международной бизнес-школы (INSEAD) в Фонтенбло (Франция). Модели экономического роста в рамках проблематики устойчивого развития народонаселения и окружающей среды разрабатываются финским экономистом Т. Палокангасом Исследованию демографических процессов и их моделированию посвящены работы У. Сандерсона. Приложениями игровых задач управления в экономических, экологических моделях и финансовой математике занимается Дж. Касти из Международного института прикладного и системного анализа (IIASA, Австрия) Р. Авенхаус, С. Пиксль из Университета Бундесвера в Мюнхене, Г. Пеш из университета Байрута, а также Г. Фейхтингер, Р. Хартл, Ф. Вирл, Р. Нек из университета Австрии.

[7] *Schelling, T.C.*, The Strategy of Conflict. Harvard University Press, 1980.

[8] *Grossman, G.M., Helpman, E.*, Innovation and Growth in the Global Economy. MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

[9] *Tarasyev, A.M., Watanabe, C.*, Dynamic Optimality Principles and Sensitivity Analysis in Models of Economic Growth // Nonlinear Analysis, 2001. Vol. 47, No. 4. P. 2309–2320.

[10] *Ayres, R.U., Warr, B.*, Accounting for Growth: the Role of Physical Work // Structural Change and Economic Dynamics. 2005. Vol. 16. No. 2. P. 181–209.

Л.А. Петросян из Санкт-Петербургского государственного университета и Дж. Заккур из международной бизнес-школы (HEC) в Монреале (Канада).

Результаты исследований в области теории оптимального управления, дифференциальных игр и соответствующих уравнений Гамильтона-Якоби используются при решении ряда важнейших прикладных задач в области оптимизации экономического роста, инвестиционных процессов и устойчивого развития окружающей среды.

Цель работы. Цель работы предполагает: исследование свойств кусочно-определенных гамильтонианов, а также гамильтоновых систем; поиск условий для построения нелинейного регулятора, стабилизирующего гамильтонову систему в установившемся состоянии; разработку алгоритма построения оптимальных траекторий, использующего информацию о стабилизированной динамике; исследование чувствительности оптимальных решений и функции цены к изменениям параметров моделей экономического роста, которые служат основной для задач управления на бесконечном промежутке времени; приложение разработанных алгоритмов в эконометрическом моделировании.

Методы исследования. В основе работы лежат модификации принципа максимума Л.С. Понтрягина для задач управления на бесконечном промежутке времени, методы теории позиционных дифференциальных игр, элементы качественной теории дифференциальных уравнений, конструкции негладкого анализа. При калибровке моделей используются методы статистики и эконометрики.

Научная новизна. Изучены свойства гамильтонианов, обеспечивающие достаточность необходимых условий оптимальности в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина для задач на бесконечном промежутке времени. Сформулированы условия, при которых оказывается возможным построение нелинейного регулятора, стабилизирующего гамильтонову динамику в окрестности положения равновесия гиперболического типа. Исследованы свойства стабилизированных траекторий, необходимые для анализа поведения и построения оптимальных решений в задаче управления с бесконечным горизонтом. Разработан алгоритм построения оптимальных решений в задаче управления на бесконечном промежутке времени, использующий информацию о стабилизированных траекториях для локализации поиска начальной точки при интегрировании гамильтоновой системы в обратном времени. Построена оценка точности алгоритма по функционалу качества задачи оптимального управления, связывающая параметры модели с точностью приближения начальной позиции для интегрирования системы в обратном времени. Изучены свойства чувствительности оптимальных решений и функции цены по отношению к изменениям параметров моделей роста.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в работе теоретические результаты направлены на исследование задач на бесконечном промежутке времени. Прежде всего, они ориентированы на анализ качественного поведения оптимальных решений вблизи положения равновесия динамической системы. Приведенные в работе конструкции нелинейного стабилизатора позволяют, базируясь на его свойствах, реализовывать алгоритмы построения оптимальных траекторий в задачах управления с бесконечным горизонтом, а также оценивать их точность. Кроме этого, исследование вопросов чувствительности оптимальных решений и функций цены к изменениям параметров производственных функций представляет особый интерес в виду того, что калибровка моделей производится эконометрическими методами, которые не могут гарантировать получения точных оценок параметров моделей. Практическую ценность представляют результаты, связанные с численными алгоритмами построения оптимальных траекторий в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом. Полученные алгоритмы могут быть использованы для эконометрического моделирования, результатом которых служит качественный анализ синтезированных модельных траекторий, который может быть использован при моделировании инвестиционных процессов. Более того, предложенные алгоритмы обладают свойством инвариантности к размерности и могут быть использованы для анализа многофакторных моделей экономического роста. В частности, в работе проведено исследование двухфакторной модели экономического роста.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на всероссийских конференциях: 40–42 всероссийские молодежные конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (УрО РАН, Свердловская обл., 2009—2011 годы); на семинаре "Проблемы динамического управления" кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, на семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН; на международных конгрессах и конференциях: 8-ой международный IFAC симпозиум по нелинейным управляемым системам (8th IFAC NOLCOS, Bologna, Italy), 25–ая IFIP конференция 7–го технического комитета "Системное моделирование и оптимизация" (25th IFIP TC 7 Conference 2011, Berlin, Germany), 18-ый IFAC конгресс международной организации по автоматическому управлению (18th IFAC World Congress, Milan, Italy).

Публикации. Основные материалы диссертации опубликованы в 10 работах. Из них 3 публикации из списков ВАК [1]–[3], 1 публикация в рецензируемых российских сборниках [4], 3 публикации в трудах международных конференций [7]–[10] и 3 тезиса докладов. В совместных работах [1]–[4], [9], [10] научному руководителю А.М. Тарасьеву принадлежит постановка задачи. В работе [8] в соавторстве научному руководителю А.М. Тарасьеву принадлежит постановка задачи, W. Sanderson'у принадлежит используемая при построении многофакторной модели экономического роста SEDIM модель.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Нумерация глав, параграфов и утверждений сквозная. Объем работы составляет 180 страниц текста. Библиография содержит 212 наименований.

Основные результаты диссертации

1. Исследованы вопросы чувствительности оптимальных решений и функций цены к изменениям параметров производственных функций. Показано, что оптимальные решения непрерывно зависят от параметров производственной функции, а функция цены нелинейной задачи поточечно сходится к функции цены линейной задачи, когда параметр эластичности производственной функции растет вплоть до своего предель-

ного значения, равного единице. Стационарные точки гамильтоновых систем при этом вырождаются и стремятся к бесконечности или нулю в зависимости от параметров модели.

2. Для гамильтоновой системы, возникающей вследствие применения принципа максимума Л.С. Понтрягина, сформулированы условия, при которых для нее можно построить нелинейный регулятор, порождающий динамическую систему, решение которой обладает поведением, схожим с поведением решений исходной системы.

3. Разработан алгоритм построения оптимальных траекторий в задачах управления на бесконечном промежутке времени, который использует конструкцию нелинейного стабилизатора для локализации поиска начальной точки при интегрировании гамильтоновой системы в обратном времени.

4. Получены оценки точности алгоритма построения оптимальных траекторий, которые устанавливают связь между параметрами точности в фазовом пространстве и параметрами точности функциональных показателей.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Первая глава диссертации посвящена исследованию оптимальных решений и функций цены задач управления на бесконечном промежутке времени в аспекте их чувствительности к изменениям параметров производственных функций, используемых в моделях экономического роста. Глава состоит из пяти параграфов.

В первом параграфе описывается односекторная модель экономического роста. Обсуждается вариант модели Солоу-Шелла оптимального инвестирования. Описываются основные переменные, включая управляющие параметры модели. Формулируется общая задача оптимального управления, основанная на модели экономического роста.

Задача управления. P. *Максимизировать функцию полезности*

$$J(t_0,k_0)=\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\delta t}\left(\ln\left(1-s(t)\right)+\ln f(k(t))\right)dt$$

на траекториях $(k(\cdot);\ s(\cdot))$ *динамической системы*

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k(t)) - \lambda k(t), \quad k(t_0) = k_0, \quad 0 \leqslant s(t) \leqslant a < 1.$$

Здесь k обозначает капитал на душу населения, $f(k)$—производственная функция. Доля ВВП y, инвестируемая в капитал, обозначена символом s и играет роль управляющего параметра, являющегося измеримой по переменной времени t функцией. Константы δ, λ, k_0 являются положительными и априори заданными величинами. Параметр a, $a \in (0,\ 1)$ отделяет правую границу параметра управления от единицы. Обсуждаются свойства производственных функций: положительности, строгого монотонного роста и строгой вогнутости. Рассматриваются два вида производственных функций: Кобба-Дугласа $f(k) = \alpha\, k^{\beta}$, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, и линейная $f(k) = \alpha\, k$. Линейная функция, в данном случае, является предельным вариантом экспоненциальной функции Кобба-Дугласа, когда ее параметр эластичности β достигает своего максимально возможного значения, равного единице. В предельной ситуации производственная функция теряет свойство строгой вогнутости. Для обоих случаев формулируются задачи оптимального управления P_β и P_1.

Второй параграф посвящен исследованию необходимых и достаточных условий оптимальности. Исследуются свойства гамильтоновых функций. Строятся оптимальные управления. Доказывается, что в линейной задаче управления с бесконечным горизонтом оптимальное управление является постоянной величиной, определяемой параметрами модели. Проверяются свойства гладкости и строгой вогнутости максимизированных гамильтонианов.

В третьем параграфе проводится качественный анализ задач управления. Исследуется вопрос наличия стационарных точек гамильтоновых динамик. Доказывается, что линейная задача управления не обладает установившимся состоянием, в то время, как нелинейная задача имеет единственную стационарную точку седлового типа. Так же показывается, что фазовая координата стационарной точки, при достижении параметром эластичности производственной функции Кобба-Дугласа единицы, стремиться либо к нулю, либо к бесконечности.

Четвертый параграф посвящен построению оптимальных траекторий в обеих задачах оптимального управления. В линейной задаче оптимальные решения имеют аналитическое представление и могут быть выписаны в явном виде. Для нелинейной задачи в явном виде выписать оптимальные решения удается лишь в областях с постоянным управлением. В области переменного управления решение строится численно. Также в этом параграфе обосновывается непрерывная зависимость оптимального решения от параметра эластичности производственной функции и начальных данных. Доказывается сходимость оптимального решения нелинейной задачи к оптимальным траекториям линейной задачи управления. Приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующих указанную сходимость.

Пятый параграф посвящен исследованию функций цены в обеих задачах управления. Для линейной задачи управления функция цены строится в явном виде. Доказывается поточечная сходимость функции цены нелинейной задачи к функции цены линейной задачи управления.

Теорема 1. *Функция цены нелинейной задачи оптимального управления $V_\beta[t_0, k_0]$ поточечно сходится к функции цены $V_1[t_0, k_0]$ линейной задачи, когда параметр эластичности β производственной функции Кобба-Дугласа растет вплоть до своего предельного значения, равного единице.*

Для функции цены нелинейной задачи управления вычисляется ее значение в стационарной точке. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующих поточечную сходимость.

Вторая глава диссертации освещает вопросы, связанные с исследованием качественного поведения оптимальных траекторий вблизи положения равновесия. В этой главе рассматривается многофакторная модель экономического роста, на основании которой формулируется задача оптимального управления. Проводится исследование задачи управления и указываются условия для построения нелинейного регулятора гамильтоновой динамики, с помощью которого удается провести анализ поведения оптимальных траекторий в окрестности положения равновесия. Вторая глава состоит из пяти параграфов.

Первый параграф посвящен построению многофакторной модели экономического роста, описанию основных переменных модели, в том числе и управляющих параметров. Рассматриваемая модель оперирует тремя производственными факторами: основной капитал k, квалифицированная рабочая сила l и полезная работа u. Эти производственные факторы используются для описания однородного выпуска внутреннего валового продукта (ВВП) y и являются фазовыми переменными управляемой системы. Инвестиции в основной капитал s и в образование r как фактор, повышающий эффективность труда, рассматриваются в качестве управляющих параметров модели. Функция полезности определяется как интегральный индекс потребления c логарифмического типа, дисконтированный на бесконечном промежутке времени. На основании модели формулируется задача оптимального управления инвестициями в производственные факторы.

Задача управления. *Максимизировать функционал*

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\ln (1 - s(t)) + \ln (1 - r(t)) + \ln f(k(t), l(t)) \right) dt$$

на траекториях $(k(\cdot), l(\cdot), s(\cdot), r(\cdot))$ *динамической системы*

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s(t) f(k(t), l(t)) - (\delta + \rho) k(t), \quad k(t_0) = k^0, \\ \dot{l}(t) = b r(t) f(k(t), l(t)) - \rho l(t), \quad l(t_0) = l^0, \end{cases}$$

где управляющие воздействия $(s(\cdot), r(\cdot))$ *подчиняются ограничениям* $0 \leq s(t) \leq a_s < 1, \quad 0 \leq r(t) \leq a_r < 1, \quad 0 \leq a_s + a_r < 1.$

Второй параграф ориентирован на исследование поставленной задачи оптимального управления. Здесь приводятся необходимые условия принципа максимума Л.С. Понтрягина для задач на бесконечном промежутке времени, развитые в работах С.М. Асеева и А.В. Кряжимского. Исследуются свойства гамильтонианов, отвечающих различным управляющим режимам. Проверяются достаточные условия оптимальности. Доказываются свойства гладкости и строгой вогнутости максимизированного гамильтониана в рамках дополнительных условий на производственную функцию.

Свойство. *Максимизированный гамильтониан $H(k,l;\psi_1,\psi_2)$ является строго вогнутой функцией по фазовым переменным при положительных значениях сопряженных переменных $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$ во всех областях своего определения D_{ij}, $i,j = 1,2,3$, кроме области переменного управления D_{22}. В области переменного управления D_{22} для строгой вогнутости максимизированного гамильтониана $H(k,l;\psi_1,\psi_2)$ требуется отрицательная определенность следующей матрицы:*

$$\partial f(k,l) = \begin{pmatrix} -f & f_k & f_l \\ f_k & f_{kk} & f_{kl} \\ f_l & f_{kl} & f_{ll} \end{pmatrix}, \quad \forall (k,l;\psi_1,\psi_2) \in D_{22}, \quad \psi_1 > 0,\ \psi_2 > 0,$$

где символами $f_k, f_l, f_{kk}, f_{kl}, f_{ll}$ обозначены частные производные производственной функции $f = f(k,l)$ первого и второго порядков.

Описываются области, отвечающие различным оптимальным режимам управления.

В третьем параграфе проводится качественный анализ гамильтоновых систем, составленных для каждого режима оптимального управления. Исследуется вопрос о существовании стационарных точек, их единственности. Доказывается, что установившееся состояние располагается в области переменного управления. Для производственной функции Кобба-Дугласа явно указываются координаты стационарной точки.

Проводится анализ установившегося состояния. Предполагается, что матрица гамильтоновой системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия, обладает свойствами

$A1$. Имеет 4 различных действительных собственных значения, два из которых отрицательны, а два других - положительны:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3 < \lambda_4.$$

$A2$. Собственные вектора h_1 и h_2, отвечающие отрицательным собственным значениям λ_1, λ_2 соответственно, обладают свойством

$$h_{11}h_{22} \neq h_{12}h_{21}.$$

Замечание. *Согласно теореме Гробмана-Хартмана предположение $A1$ означает, что нелинейная система имеет траекторию аналогичную траектории линейной системы, которая сходится к установивше-*

муся состоянию по касательной к плоскости, образованной собственными векторами, отвечающими отрицательным собственным значениям.

В четвертом параграфе обсуждается алгоритм построения нелинейного регулятора, основанного на принципе обратной связи, который переводит систему из любого начального положения в положение, соответствующее стационарной точке. Алгоритм состоит из нескольких шагов:

1. построение плоскости, содержащей стационарную точку, по собственным векторам, отвечающим отрицательным собственным значениям матрицы Якоби, вычисленной в стационарной точке;
2. выражение сопряженных координат из уравнений плоскости;

$$z_1 = z_1^* + \gamma_{11}(k - k^*) + \gamma_{12}(l - l^*) = z_1(k, l),$$
$$z_2 = z_2^* + \gamma_{21}(k - k^*) + \gamma_{22}(l - l^*) = z_2(k, l).$$

3. построение нелинейного стабилизатора путем подстановки в выражения для оптимального управления, соответствующего области установившегося состояния, сопряженных переменных, которые были получены из уравнения плоскости.
4. построение стабилизированной динамики путем подстановки в первые два уравнения гамильтоновой системы, определенной для области установившегося состояния, сопряженных переменных, выраженных из уравнения плоскости.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если линеаризованная в окрестности положения равновесия $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$ гамильтонова система, построенная в области непостоянных управлений D_{22}, удовлетворяет условиям $A1$ и $A2$. Тогда для нее существует нелинейный регулятор вида*

$$\widehat{s}(k,l) = 1 - \frac{k}{z_1(k,l)f(k,l)}, \quad \widehat{r}(k,l) = 1 - \frac{l}{bz_2(k,l)f(k,l)},$$

который (1) порождает систему, замкнутую относительно фазовых переменных k, l; (2) обладает стационарной точкой (k^*, l^*), координаты которой совпадают с фазовыми координатами стационарной точ-

ки $(k^*, l^*; z_1^*, z_2^*)$ исходной гамильтоновой системы; (3) *стабилизирует систему в установившемся состоянии.*

В пятом параграфе приводятся результаты численного решения стабилизированной в окрестности положения равновесия гамильтоновой системы.

Третья глава посвящена алгоритму построения оптимальных траекторий в задачах с бесконечным горизонтом. Алгоритм основан на использовании конструкции нелинейного регулятора, порождающего стабилизированную систему, поведение решений которой близко к поведению оптимальных траекторий в окрестности стационарной точки. Используя данную информацию, удается локализовать поиск начальной точки для интегрирования гамильтоновой динамики в обратном времени. Третья глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе рассматривается алгоритм построения оптимальных траекторий, который заключается в следующих шагах:

1. вычисление координат стационарной точки гамильтоновой системы методом последовательных приближений;
2. линеаризация гамильтоновой системы в окрестности установившегося состояния;
3. вычисление собственных чисел и собственных векторов линеаризованной системы; проверка их соответствия условиям, в рамках которых возможна конструкция нелинейного стабилизатора;
4. построение нелинейного регулятора и стабилизированной системы дифференциальных уравнений;
5. поиск решения стабилизированной системы;
6. локализация поиска начальных условий для интегрирования гамильтоновой системы в обратном времени за счет точек, полученных с решения стабилизированной системы;
7. интегрирование гамильтоновой системы в обратном времени из выбранного начального положения, лежащего в окрестности точки, взятой с решения стабилизированной системы, с учетом возможного переключения управляющих режимов вплоть до исходного начального положения системы;

8. развертка интегрированной траектории в прямом времени и масштабирование временной шкалы.

Второй параграф посвящен построению оценки точности алгоритма. Полученные оценки устанавливают связь между параметрами точности в фазовом пространстве и параметрами точности функциональных показателей.

Теорема 3. *Точность алгоритма по функционалу оценивается точностью аппроксимации ε начальных условий в алгоритме. В зависимости от соотношений параметров возможны три случая оценки:*

1. *Если модуль липшицевости ν гамильтоновой динамики строго меньше параметра дисконтирования λ, точность алгоритма по функционалу имеет порядок ε^2;*
2. *Если $\nu = \lambda$, то оценка имеет вид: $\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon^2}$.*
3. *Если $\nu > \lambda$, то точность имеет порядок: $\varepsilon^{2\frac{\lambda}{\nu}} \ln \frac{1}{\varepsilon^2}$.*

В третьем параграфе приводится иллюстрация работы алгоритма на примере построения оптимальных траекторий в задаче управления, исследованной во второй главе диссертации. Полученные аппроксимационные решения достаточно хорошо соответствуют реальным статистическим данным. Также из построенных решений видно, что они гладко проходят точки смены управляющих режимов. Каждая из траекторий роста имеет уровень насыщения, соответствующий стационарному положению гамильтоновой динамики. Проводится сравнительный анализ траекторий, полученных из решения стабилизированной системы, и оптимальных стратегий. В окрестности положения равновесия эти траектории оказываются очень близки друг к другу.

В четвертом параграфе проводится сравнительный анализ односекторной и двухсекторной моделей экономического роста. На основании предложенного алгоритма для соответствующих задач управления строятся оптимальные решения и проводится их сравнение как друг с другом, так и с реальными данными. Вычислительные эксперименты показали, что учет такого производственного фактора, как эффективность труда l, увеличивает точность модельных траекторий относительно реальных данных.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах

1. Тарасьев А.М., Усова А.А., Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста // Труды математического института им. В.А. Стеклова, 2010. Т. 271, С. 1–21.

2. Тарасьев А.М., Усова А.А., Влияние параметров производственных функций на равновесное решение и функцию цены задачи оптимального управления // Математическая теория игр и приложения (МТИП) – Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2011. Т. 3, Вып. 3, С. 85–115.

3. Tarasyev A.M., Usova A.A., Nonlinear stabilizer constructing for two-sector economic growth model // Труды института математики и механики — УрО РАН, 2010. Vol. 16, No. 5, P. 297–307.

Другие публикации

4. Тарасьев А.М., Усова А.А., Исследование асимптотического поведения оптимальных траекторий и функций цены в односекторных моделях экономического роста при изменении коэффициента эластичности производственной функции // Сборник научных трудов: Проблемы динамического управления – ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2010. Вып. 5, С. 251–270.

5. Усова А.А., Функция цены в задаче управления с линейной динамикой и логарифмическим функционалом качества // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции — Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 260–265

6. Усова А.А., Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста // Проблемы теорети-

ческой и прикладной математики: Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции — Екатеринбург: УрО РАН, 2010. тр. 372–378

7. Усова А.А., Влияние изменений параметров производственных функций в моделях экономического роста на поведение решений задач управления на бесконечном горизонте // Современные проблемы математики: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2011. С. 54–56.

8. Sanderson W., Tarasyev A., Usova A., Capital vs. Education: Assessment of Economic Growth from Two Perspectives // Proceedings of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2010. P. 1110–1115.

9. Tarasyev A., Usova A., The Value Function as a Solution of Hamiltonian Systems in Linear Optimal Control Problems with Infinite Horizon // IFAC PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, 2011. Vol. 18, Part 1.

10. Tarasyev A.M, Usova A.A., An Iterative Direct-Backward Procedure for Construction of Optimal Trajectories in Control Problems with Infinite Horizon // IFAC PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, 2011. Vol. 18, Part 1.

Отпечатано в типографии
ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
тел. (343) 362-91-16, 362-91-17
Заказ 3441 Тираж 130

102